Ответы, решения и критерии оценивания задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по МАТЕМАТИКЕ (2018-2019 уч. год)

7 класс

1. Ответ: не могло.

Решение. Заметим, что число грибов у каждой пары детей делится на 4. Это означает, что суммарное число грибов должно делиться на 4. Однако число 2019 на 4 не делится.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. В противном случае 0 баллов.

2. Ответ: Не могла.

Решение.. Из представления следует, что или три из слагаемых равны 98 (что невозможно получить из трехзначного числа с помощью вычеркивания цифры), либо два слагаемых равны 99, а одно – 96, либо одно - 99, второе - 98, третье – 97. Это невозможно, потому что любая цифра по условию встречается хотя бы в двух из полученных чисел).

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Пропущены случаи – 1 балл.

3. Ответ: все лжецы.

Решение. Заметим, что 2-й и 3-й высказываются о текущей улице по-разному, а о предыдущей одинаково. Это означает, что среди них нет ни одного рыцаря, т.е. 2-й и 3-й – лжецы. Но 3-й и 1-й говорят о текущей улице одинаково, значит, 1-й тоже лжец.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Правильно определена пара лжецов – 2 балла.

4. Ответ: не могло.

Решение. Предположим, что требуемая расстановка чисел существует. Тогда, так как суммы чисел, стоящих в соседних столбцах, отличаются на единицу, то в трех столбцах сумма чисел четна, а в трех других нечетна, т.е. сумма чисел во всей таблице нечетна. Однако 1 + 2 +…+ 36 = 666 – четное число – противоречие.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. В противном случае 0 баллов.

5. Ответ: 1, 2, 2 и 9.

Решение. Число 36 можно разложить на 4 натуральных сомножителя девятью способами. При этом получаются 8 различных сумм этих сомножителей. Но раз второй математик сказал, что этой информации недостаточно, то это означает, что возможно больше одного варианта решения, то есть в обоих случаях сумма сомножителей равна 14. После последней подсказки (про старшего ребенка) становится ясно, что детям первого математика 1, 2, 2 и 9 лет.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примера оценивается в 0 баллов. Перебор всех возможных произведений и сумм без обоснования ответа – не более 3.

8 класс

Решения

1. $$1+6+6^2+6^3+\cdots+6^{99}=(1+6)+(6^2+6^3)+\cdots+(6^{98}+6^{99})=$$
$$=(1+6)+6^2(1+6)+\cdots+6^{98}(1+6)=(1+6)(1+6^2+\cdots+6^{98}).$$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. За неточности в преобразованиях снимается 1 балл.

2. $$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$$

Критерии оценивания(0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. За неточности в доказательстве снимается 1 балл. Запись выражения в виде $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ с дальнейшими преобразованиями, не приведшими к цели, оценивается в 1 балл.

3. Пусть v – скорость Маши, u - скорость Вани. Получаем уравнение

$$(v-u)\times 3 = u+v$$
$$v = 2u$$

То есть, скорость Вани в два раза больше скорости Маши.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Правильно составлено уравнение или система уравнений, которые приводят к решению задачи, - решение оценивается в 4 балла.

4.

1) AO=BO, так как треугольник AOC равнобедренный,
AM=BN по условию,
OAM=∠OBN=45°, так как BO является биссектрисой.
Значит, треугольники OAM и OBN равны по двум сторонам и углу между ними.
Следовательно, OM=ON, то есть треугольник MON равнобедренный.

2) Из равенства треугольников OAM и OBN следует, что ∠AOM=∠BON.
∠ MON=∠MOB+∠BON=∠MOB+∠AOM=∠AOB=90°, значит треугольник MON прямоугольный.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Доказано только, что треугольник MON прямоугольный, или только, что треугольник MON равнобедренный – решение оценивается в 4 балла. В доказательстве не обоснован один из ключевых выводов – снимается 3 балла.

5. Выигрывает первый.

Выигрышная стратегия: первым ходом прибавляет пятерку, а затем отвечает на ходы соперника так: соперник прибавляет двойку – первый игрок прибавляет пятерку, соперник прибавляет пятерку – первый игрок прибавляет двойку.

Доказательство стратегии.

1000=7*142+5+1. Пара ходов (прибавление двойки и пятерки) – к имеющемуся числу прибавляется 7. Из равенства следует, что последний ход сделает первый игрок.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. Описана верная выигрышная стратегия, но без обоснования – решение оценивается в 4 балла.

9 класс

Решения

1. $(5n)^2$ - остаток 0 при делении на 5;
$(5n\pm1)^2 = 25n^2 \pm 10n + 1$ - остаток 1 при делении на 5;
$(5n\pm2)^2 = 25n^2 \pm 20n + 4$ - остаток 4 при делении на 5.
Полный квадрат при делении на 5 остатки 2 и 3 не дает.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов.

2. Задача решена с помощью таблицы.

	Работа	Время	Производительность
Маша и мама	1	1/2	2
Маша и папа	1	2/3	3/2
Маша, мама и папа	1	x	$\frac{1}{x}$

Маша	1	y	$\frac{1}{y}$

Получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{2} \\ \frac{2}{3}<y\le 1 \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{1}{x}=\frac{7}{2}-\frac{1}{y}$$

и делаем оценку

$$\frac{2}{3}<y\le 1$$

$$2<\frac{7}{2}-\frac{1}{y}\le\frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{5}\le x<\frac{1}{2}$$

Наименьшее время 2/5 часа, то есть 24 минуты.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

В оценке допущена ошибка - решение оценивается не более, чем в 3 балла.

3. Предположим, что нашлись два числа x и y такие, что x+y=2018 и а x*y делится на 2018. Так как 2018=2*1009, 1009 - простое число, то одно из чисел, для определенности x, делится на 1009, но тогда и y делится на 1009, так как x+y=2018. Аналогично и x, и y делятся на 2. Значит, каждое из них не меньше 2018, следовательно, их сумма больше 2018 – противоречие.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

В доказательстве не обоснован один из ключевых моментов (например, что одно из натуральных чисел делится на 1009, так как 1009 простое число) – снимается 2 балла.

4.

1) Треугольники ABM и BCN равны по двум катетам. Значит, $\angle$ABM=$\angle$BCN.

2) $\angle$BCN=$\angle$ABM=90°-$\angle$KBC. Значит, $\angle$BCN+$\angle$KBC=90°. Следовательно, $\angle$BKC=90°

3) Получаем, что прямой угол MKN опирается на диаметр MN окружности, описанной около треугольника AMN. Значит, точка K лежит на этой окружности.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Доказано, что $\angle$MKN=90°, но не доказано, что точка K лежит на окружности, описанной около треугольника AMN - решение оценивается в 5 баллов. За неточности в обоснованиях снимается 1 балл.

5. Выигрывает первый.

Выигрышная стратегия: первый ходит на 3, 5, 9, 15, 24, 37, 57, 86, 130, 196, 295, 443, 666, 1000.

Доказательство стратегии.

На 1000 игра заканчивается - это проигрышная позиция. На 1000 можно попасть с любого числа от 667 до 999 - это выигрышные позиции. Значит, 666 - проигрышная позиция (с выигрышной позиции должен быть ход на проигрышную позицию, с проигрышной позиции все ходы на выигрышные позиции). Продолжаем такой анализ и получаем все проигрышные позиции (перечислены в стратегии), а также, что 2 (начало игры) - выигрышная позиция. Выигрышная стратегия состоит в том, чтобы ставить соперника на проигрышную позицию.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. Описана верная выигрышная стратегия, но без обоснования – решение оценивается в 4 балла.

10 класс

1. Ответ: n=m=2

Решение: Пусть x_1 и x_2 –корни уравнения $mx^2 + mnx + n = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = \frac{n}{m}$, $x_1 + x_2 = -n$. Отношение $\frac{n}{m}$ простых чисел – целое, значит $n = m$ и $x_1x_2 = 1$, откуда $x_1 = x_2 = -1$ и $m = n = 2$.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Решение не продвинулось далее т. Виета -1 балл. Определены искомые параметры без обоснования – не более 2 баллов.

2. Ответ: Не существует.

Решение: Предположим, что существует такое число у, что все три числа данные в условии, целые. Тогда их сумма, равная у, тоже целая. Первое число будет целым тогда, когда у -целое и $\sqrt{y^4 + 5}$ - целое. Из равенства $y^4 + 5 = t^2$ следует: $t^2 - y^4 = 5$. Данное диофантово уравнение не разрешимо в целых числах.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Получено диофантово уравнение – 2 балла, рассмотрены не все случаи решения уравнения – 3 балла.

3. Ответ: Выиграет второй.

Решение: Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 8 камней, во второй – 10 камней, в третьей – 12 камней, т.е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т.е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т.е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он и заберет последние камни из кучек и выиграет.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. Описана верная выигрышная стратегия, но без обоснования – решение оценивается в 4 балла.

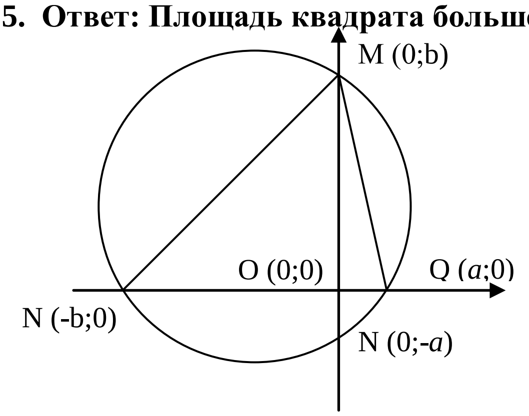
4. Ответ: -1.

Из равенства $a^2 - a + 1 = 0$ следует $a - 1 + \frac{1}{a} = 0$, $a + \frac{1}{a} = 1$. $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1 = 0$, откуда $a^3 = -1$. $a^{6n+2} + \frac{1}{a^{6n+2}} = (a^3)^{2n}a^2 + \frac{1}{(a^3)^{2n}a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 2 = 1 - 2 = -1$.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Преобразовано равенство -2 балла, получено значение $a^3 = -1$ без первого шага -1 балл, с первым шагом- 4 балла. Дальнейшее преобразование с ошибкой не более 5 баллов.

5. Ответ: Площадь квадрата больше площади круга.



Введем систему координат как показано на чертеже. PM=PQ, следовательно $\sqrt{2}b = a + b, a = b(\sqrt{2}-1)$. $2R = \frac{MQ}{Sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}, S_{\text{кр}} = \pi\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{b^2((\sqrt{2}-1)^2+1)}{2}$.

Площадь квадрата $S = 2b^2$. Сравнивая коэффициенты при b^2, убеждаемся, что площадь квадрата больше площади круга.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Найдена площадь квадрата – 2 балла, площадь круга- 3 балла, допущена ошибка в сравнении – не больше 5 баллов.

11 класс

1. **Ответ: Не существует.**

Решение: Пусть $2tgx + \sqrt{5} = n$ и $2ctgx + \sqrt{5} = m$, где n и $m -$ целые числа. Тогда $2tgx = n - \sqrt{5}$ и $2ctgx = m - \sqrt{5}$, следовательно $(n-\sqrt{5})(m-\sqrt{5}) = 2$, откуда $mn + 3 = \sqrt{5}(m+n)$. Равенство возможно только в случае если $mn + 3 = (m+n) = 0$. Это возможно только для иррациональных m и n $(n = \pm\sqrt{3},\ m = \mp\sqrt{3})$.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Выполнены преобразования, позволяющие оценить исходные числа, но оценка не проведена – не более 3 баллов. Найдена только одна пара – 4 балла.

2. **Ответ: Выиграет второй.**

Решение: Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 8 камней, во второй – 10 камней, в третьей – 12 камней, т.е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т.е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т.е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он и заберет последние камни из кучек и выиграет.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение примеров оценивается в 0 баллов. Описана верная выигрышная стратегия, но без обоснования – решение оценивается в 4 балла.

3. **Ответ: 3 положительных члена.**

Заметим, что при n>3 имеем $10^n - 1000 = 10^3(10^{n-3}-1) = 25\cdot 40\cdot(10^{n-3}-1)$; $(10^{n-3}-1)$ делится на 9, поэтому все произведение делится на 360, поэтому все члены последовательности, начиная с четвертого, совпадают с $sin1000^{\circ} = \sin(3\cdot 360^{\circ} - 80^{\circ}) < 0$. Таким образом, в последовательности 3 положительных членов.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Дан правильный ответ без обоснования 1 балл. Проведена частичная оценка (не менее 4-х членов) – 2 балла. В целом оценка проведена, но с ошибкой – не более 5 баллов.

4. **Ответ: -1.**

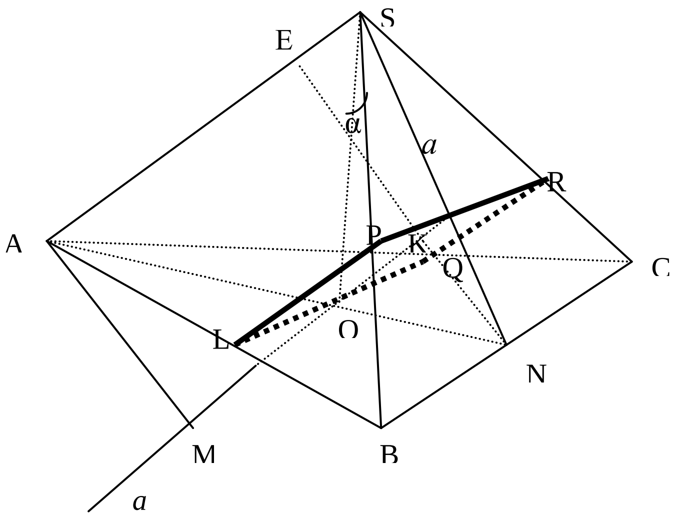
Из равенства $a^2 - a + 1 = 0$ следует $a - 1 + \frac{1}{a} = 0,\ a + \frac{1}{a} = 1.\ a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1 = 0$, откуда $a^3 = -1.\ a^8 + \frac{1}{a^8} = (a^3)^2 a^2 + \frac{1}{(a^3)^2 a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 2 = 1 - 2 = -1.$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Преобразовано равенство -2 балла, получено значение $a^3 = -1$ без первого шага -1 балл, с первым шагом- 4 балла. Дальнейшее преобразование с ошибкой не более 5 баллов.

5. Ответ: $S = \frac{8a^2}{3(4 - 3sin^2\alpha)}$

Сечением будет являться прямоугольник, так как скрещивающиеся ребра правильного третраэдра перпендикулярны. Расстояние от ВС до секущей плоскости - отрезок МК (перпендикуляр к прямой a, он же отрезок КЕ), расстояние от вершины А до секущей плоскости - отрезок АМ (перпендикуляр к прямой a). $LQ = \frac{2}{3}BC,\ LP = \frac{1}{3}AS$, $\text{BO} = \frac{\text{BC}}{\sqrt{3}}, SB = BC, BN^2 = BS^2 - SN^2,\ BC = \frac{a2\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3sin^2\alpha}},\ S = \frac{8a^2}{3(4 - 3sin^2\alpha)}$.



Критерии оценивания (0 - 7 баллов)

Верно построено сечение – 1 балл, обосновано, что сечение прямоугольник – 2 балла, верно показаны на чертеже расстояния (до точек и прямой) с обоснованием – 3 балла, выполнены промежуточные расчеты, но ответ не доведен до конца – не более 5, допущена ошибка в вычислениях, но ход решения задачи верный – 6 баллов.